پایداری K - G قاب های پیوسته

نرگس سادات بنی طبا*
دانشکده علوم ، دانشگاه پیام نور ، تهران، ایران

چکیده. در این مقاله ابتدا گزاره ایی در مورد پایایی g - k قاب های پیوسته تحت برخی از عملگرهای جبری می اوریم و سپس با اعمال شرایط لازم و به کمک خواص عملگرها،ترکیباتی از g - k قاب ها را می سازیم به گونه ایی که مجددا g - k قاب پیوسته به دست اید.واضح است که می توان ترکیبات متعدد و جالبی از این دسته از قاب ها ایجاد نمود.در قسمت اخر به نتیجه ایی در مورد قاب های پیوسته چسبان که شکل خاصی از قاب های پیوسته هستند،اشاره شده است.

واژه‌های کلیدی: g-k قاب چسبان ، g-k قاب پیوسته ، قاب پیوسته.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 00A69 , 06D22.

۱. پیش‌گفتار

نظریه قاب ها (قاب های گسسته) برای اولین بار توسط دافین و شیفر در سال ۱۹۵۲ در زمینه مسائل سری های فوریه غیر هارمونیک مطرح گردید [۴].دابشی،گراسمن و میر به طور جداگانه نظریه قاب ها را در سال ۱۹۸۶ معرفی کردند [۷].خواص متنوع و کاربردی قاب ها آن را به ابزاری قدرتمند در فضاهای تابعی،کدنویسی و مخابرات ،رشته های مهندسی،کوانتوم و فیزیک تبدیل کرده است.مفهوم قاب های پیوسته در [۱] به صورت خانواده ایی اندیس شده در فضای موضعا فشرده به همراه یک اندازه رادون عنوان شد.همچنین به طور جداگانه توسط کیزر و گازو نیز معرفی شدند[۶]. گاباردو و هان [۵] این قاب ها را قاب های متناظر با فضای اندازه نام گذاری کرده اند و اقایان عسکری همت،رجبعلی پور و دهقان آنها را قاب های توسعه یافته نامیده اند [۳]. در تمام این نوشته H ، (Ω,μ) و $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ به ترتیب یک فضای هیلبرت جدایی پذیر، یک فضای اندازه و خانواده ایی از فضاهای هیلبرت را تداعی می کنند.در ابتدا برای اشنایی بیشتر خواننده با مفاهیم مورد بحث چند تعریف را می آوریم.

تعریف ۱.۱. فرض کنید $K\in B(H)$ عملگری خطی و کراندار روی H باشد.دنباله $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک K - قاب برای H نامیده می شود اگر ثابتهای $A,B>0$ موجود باشند به طوری که

$$A\|K^*f\|^2\leq\sum_{n=1}^{\infty}|\langle f,f_n\rangle|^2\leq B\|f\|^2,\qquad (f\in H). \tag{۱}$$

ثابتهای A و B کرانهای پایینی و بالایی K - قاب $\{f_n\}$ نامیده می شود.اگر فقط قسمت راست نامساوی فوق برقرار باشد ان را یک دنباله بسل می نامیم و در حالتی که $K=I$ یک قاب معمولی خواهیم داشت.

تعریف ۲.۱. فرض کنید $K\in B(H)$ و $\Lambda=\{\Lambda_i\in B(H,H_i):i\in I\}$. Λ یک g - K قاب برای H متناظر با $\{H_i\}_{i\in I}$ یا یک g - K قاب برای H نامیده می شود اگر ثابت های A و Bموجود باشند به طوری که

$$A\|K^*f\|^2\leq\sum_{i\in I}\|\Lambda_i f\|^2\leq B\|f\|^2,\qquad (f\in H). \tag{۲}$$

ثابت های A و B به ترتیب کرانهای پایینی و بالایی g - K قاب هستند.

تعریف ۳.۱. [۲] فرض کنید $\prod_{\omega\in\Omega}H_\omega=\{f:\Omega\longrightarrow\bigcup_{\omega\in\Omega}H_\omega\ :\ f(\omega)\in H_\omega\}$. نگاشت $F\in\prod_{\omega\in\Omega}H_\omega$ اندازه پذیر قوی است اگر F نگاشتی اندازه پذیراز Ω به$\bigoplus_{\omega\in\Omega}H_\omega$ باشد.

تعریف ۴.۱. [۲] خانواده $\Omega=\{\Omega_\omega\in B(H,H_\omega):\omega\in\Omega\}$ یک g - قاب پیوسته متناظر با $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ است اگر

(الف) به ازای هر بردار $f\in H$ ، خانواده $\{\Lambda_\omega f\}_{\omega\in\Omega}$ اندازه پذیر قوی باشد.

(ب) ثابتهای A و B موجود باشند به طوری که

$$A\|f\|^2\leq\int_{\Omega}\|\Lambda_\omega f\|^2 d\mu(\omega)\leq B\|f\|^2,\qquad (f\in H). \tag{۳}$$

* سخنران

تعریف ۵.۱. اگر (Ω,μ) فضای اندازه با اندازه ایی مثبت μ و $K\in B(H)$ باشد خانواده $\Lambda=\{\Lambda_\omega\in B(H,H_\omega):\omega\in\Omega\}$ که در آن $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ خانواده ایی از فضاهای هیلبرت هستند، یک g-K قاب پیوسته یا یک g-K-c قاب برای H متناظر با $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ است اگر
الف) به ازای هر بردار $f\in H$ ، $\{\Lambda_\omega f\}_{\omega\in\Omega}$ به طور قوی اندازه پذیر باشد.
ب) ثابتهای $0\leq A,B<\infty$ موجود باشند به طوری که

$$A\|K^*f\|^2\leq\int_\Omega\|\Lambda_\omega f\|^2d\mu(\omega)\leq B\|f\|^2,\qquad(f\in H).\tag{۴}$$

ثابتهای A و B به ترتیب کرانهای پایینی و بالایی g-K-c قاب هستند.اگر $A=B$ ، $\{\Lambda_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ یک g - K - c قاب چسبان و اگر $A=B=1$ یک g - K - c قاب پارسوال است.در صورتی که سمت راست نامساوی (۴) برقرار باشد یک خانواده g - بسل خواهیم داشت. می توان دید که هر g-K-c قاب یک g - c دنباله بسل متناظر با $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ می باشد.

۲. پایداری k - قاب های پیوسته تحت برخی اعمال جبری

فرض کنید $\{\Lambda_\omega\}_{\omega\in\Omega}\in B(H,H_\omega)$ که در آن $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ خانواده ایی از فضاهای هیلبرت است را در اختیار داریم.

گزاره ۱.۲. فضای هیلبرت H ، $L_1,L_2\in B(H)$ و $\alpha\in C$ مفروضند.اگر $\{\Lambda_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ یک g - L_1 قاب پیوسته و g - L_2 قاب پیوسته باشد، در این صورت $\{\Lambda_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ یک g - αL_1 قاب پیوسته ، g - L_1L_2 قاب پیوسته و g - L_1+L_2 قاب پیوسته است.

اثبات. اعداد مثبت A_1 ، A_2 و B موجود هستند به طوری که به ازای هر عضو f در H ،

$$A_1\|L_1{}^*f\|^2\leq\int_\Omega\|\Lambda_\omega f\|^2d\mu(\omega)\leq B\|f\|^2\tag{۵}$$

و

$$A_2\|L_2{}^*f\|^2\leq\int_\Omega\|\Lambda_\omega f\|^2d\mu(\omega)\leq B\|f\|^2.\tag{۶}$$

با استفاده از نامساوی (۵)داریم

$$\tfrac{A_1}{|\alpha|^2}\|(\alpha L_1)^*f\|^2\leq\int_\Omega\|\Lambda_\omega f\|^2d\mu(\omega)\leq B\|f\|^2$$

و نتیجه می گیریم که $\{\Lambda_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ یک g - αL_1 قاب پیوسته است. از طرفی

$$\begin{aligned}\|(L_1L_2)^*f\|^2&=\|(L_2{}^*L_1{}^*)f\|^2\\&\leq\|L_2\|^2\|L_1{}^*f\|^2\\&\leq\frac{\|L_2\|^2}{A_1}\int_\Omega\|\Lambda_\omega f\|^2d\mu(\omega)\end{aligned}$$

و نامساوی زیر به دست می آید

$$\tfrac{A_1}{\|L_2\|^2}\|(L_1L_2)^*f\|^2\leq\int_\Omega\|\Lambda_\omega f\|^2d\mu(\omega)\leq B\|f\|^2$$

و لذا $\{\Lambda_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ یک g - L_1L_2 قاب پیوسته است. اگر نامساوی های (۵) و (۶) و نامساوی کشی شوارتز را به کار ببریم داریم

$$\begin{aligned}\|(L_1+L_2)^*f\|^2&=\|L_1{}^*f+L_2{}^*f\|^2\\&\leq\|L_1{}^*f\|^2+\|L_2{}^*f\|^2+2|\langle L_1{}^*f,L_2{}^*f\rangle|\\&\leq\|L_1{}^*f\|^2+\|L_2{}^*f\|^2+2\|L_1{}^*f\|\|L_2{}^*f\|\\&\leq(\frac{1}{A_1}+\frac{1}{A_2}+\frac{2}{\sqrt{A_1A_2}})\int_\Omega\|\Lambda_\omega f\|^2d\mu(\omega)\end{aligned}$$

لذا خواهیم داشت

$$\|(L_1+L_2)^*f\|^2\leq(\tfrac{1}{A_1}+\tfrac{1}{A_2}+\tfrac{2}{\sqrt{A_1A_2}})\int_\Omega\|\Lambda_\omega f\|^2d\mu(\omega).$$

پس $\{\Lambda_\omega f\}_{\omega\in\Omega}$یک g - (L_1+L_2) قاب پیوسته است . □

اگر از استقرای ریاضی استفاده کنیم می توان گزاره قبل را برای هر تعداد متناهی عملگرهای $L_1, L_2, ..., L_n \in B(H)$ تعمیم داد.

قضیه ۲.۲. فرض کنید $\{\Lambda_\omega f\}_{\omega\in\Omega}$ یک K - g قاب پیوسته برای H متناظر با $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ و $T \in B(H)$ به گونه ایی انتخاب شود که T^*KK^* عملگر مثبت باشد. آنگاه $\{\Lambda_\omega + \Lambda_\omega T\}_{\omega\in\Omega}$ یک K - g قاب پیوسته برای H متناظر با $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ خواهد بود.

اثبات. چون $\{\Lambda_\omega f\}_{\omega\in\Omega}$ یک K - g قاب پیوسته برای H است پس ثابت های مثبت A و B موجودند به طوری که به ازای هر $f \in H$،

$$A\|K^*f\|^2 \leq \int_\Omega \|\Lambda_\omega f\|^2 d\mu(\omega) \leq B\|f\|^2$$

به ازای هر $f \in H$ ،

$$\begin{aligned} A\|K^*(I+T)f\|^2 &\leq \int_\Omega \|\Lambda_\omega(I+T)f\|^2 d\mu(\omega) \\ &\leq B\|(I+T)f\|^2 \\ &\leq B\|I+T\|^2\|f\|^2 \end{aligned}$$

با توجه به اینکه T^*KK^* عملگری مثبت می باشد می توان نوشت

$$\begin{aligned} A\|K^*(I+T)f\|^2 &= A(\|K^*f\|^2 + 2Re\langle K^*f, K^*Tf\rangle + \|K^*Tf\|^2) \\ &= A(\|K^*f\|^2 + 2Re\langle T^*KK^*f, f\rangle + \|K^*Tf\|^2) \\ &\geq A(\|K^*f\|^2 + \|K^*Tf\|^2) \\ &\geq A\|K^*f\|^2 \end{aligned}$$

درنتیجه خواهیم داشت

$$\begin{aligned} A\|K^*f\|^2 &\leq \int_\Omega \|\Lambda_\omega(I+T)f\|^2 d\mu(\omega) \\ &\leq B\|I+T\|^2\|f\|^2 \end{aligned}$$

و لذا $\{\Lambda_\omega + \Lambda_\omega T\}_{\omega\in\Omega}$ یک K - g قاب پیوسته برای H متناظر با $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ خواهد بود.

□

۳. نتیجه ایی در مورد k - g قابهای چسبان

در این قسمت به یک نتیجه در مورد قاب های پیوسته چسبان اشاره میکنیم .

قضیه ۱.۳. فرض کنید $K_1 \in B(H_1)$ و $\{\Lambda_\omega f\}_{\omega\in\Omega}$ یک K_1 - g قاب پیوسته چسبان برای H_1 باشد.اگر $K_2 \in B(H_2)$ عملگری یک به یک و پوشا و $T \in B(H_1, H_2)$ به گونه ایی انتخاب شود که تساوی $TK_1 = K_2T$ برقرار باشد،در این صورت $\{\Lambda_\omega T^*f\}_{\omega\in\Omega}$ یک K_2 - g قاب پیوسته برای H_2 خواهد بود اگر و تنها اگر T عملگری پوشا باشد.

اثبات. ابتدا فرض میکنیم T عملگری پوشا باشد.در این صورت با توجه به نتیجه ۶-۳ [8] ، $\{\Lambda_\omega T^*f\}_{\omega\in\Omega}$ یک K_2- g قاب پیوسته برای فضای H_2 خواهد بود.برعکس فرض کنیم $\{\Lambda_\omega T^*f\}_{\omega\in\Omega}$ یک K_2 - g قاب پیوسته برای H_2 با کران های A_1 و B_1 باشد، به ازای هر بردار $h \in H_2$ داریم

$$A_1\|K_2{}^*h\|^2 \leq \int_\Omega \|\Lambda_\omega T^*h\|^2 d\mu(\omega) \leq B_1\|h\|^2. \tag{۷}$$

اگر $\{\Lambda_\omega f\}_{\omega\in\Omega}$ یک K_1 - g قاب چسبان در فضای H_1 با کرانهای A و B باشد،به ازای $f \in H_1$

$$A\|K_1{}^*f\|^2 = \int_\Omega \|\Lambda_\omega f\|^2 d\mu(\omega).$$

از طرفی چون $TK_1 = K_2T$ پس داریم $K_1{}^*T^* = T^*K_2{}^*$. حال به ازای هر $h \in H_2$ ،

$$A\|T^*K_2{}^*h\|^2 = A\|K_1{}^*T^*h\|^2 = \int_\Omega \|\Lambda_\omega T^*h\|^2 d\mu(\omega).$$

با استفاده از (۷)

$$A\|T^*K_۲{}^*h\|^۲ \geq A_۱\|K_۲{}^*h\|^۲$$

و لذا

$$\|T^*K_۲{}^*h\|^۲ \geq \frac{A_۱}{A}\|K_۲{}^*h\|^۲, \qquad (\forall h \in H_۲).$$

حال ثابت می‌کنیم T پوشاست. با توجه به لم ۳-۲ در [۸] کافی است ثابت کنیم $K_۲{}^*$ پوشاست و چون $K_۲ \in B(H_۲)$ یک به یک با برد بسته فرض شده است،این مورد محقق میشود . $\square$

مراجع

1. Ali, S. T., Antoine, J.P., Gazeau, J.P.: Continuous frames in Hilbert spaces. Ann. Phys. 222, 1-37 (1993).
2. Abdollahpour. M. R., Faroughi, M.H.: Continuous G-frames in Hilbert spaces. Southeast Asian Bull. Math. 32, 1-19(2008).
3. A. Askari-Hemmat, M. A. Dehghan, M. Radjabalipour, Generalized frames and their redundancy, Proc. Amer. Math. Soc. 129(2001), no. 4, 1143-1147.
4. Duffin, R.J., Scheaffer, A.C.: A class of nonharmonic Fourier series. Trans. Am. Math. Soc. 72,341-366(1952).
5. Gabardo, J.P., Han, D.:Frames associated with measurable space. Adv. Comp. Math. 1893), 127-147(2003).
6. G. Kaiser, AFriendly Guide to Wavelets, Birkha"user, Boston, 1994.
7. I. Daubechies, A. Grossmann, Y. Meyer, Painless nonorthogonal expansions, J. Math. Phys, 27(1986) 1271-1283.
8. Rahmani, M.; On some properties of c-frames. J. Math. Res. Appl. 37(4), 466-476(2017).

پست الکترونیکی: nargesbanitaba@yahoo.com